Indução Matemática

Abramo Hefez

Texto já revisado pela nova ortografia.

Sobre o Autor

Abramo Hefez nasceu no Egito, mas é brasileiro por opção e carioca de coração. Cursou o *ginasial* e *científico* no Rio de Janeiro, graduou-se na PUC-Rio em Matemática e prosseguiu seus estudos na Universidade de Pisa, Itália e nos Estados Unidos, doutorando-se, em Geometria Algébrica no Massachusetts Institute of Technology. É Professor Titular no Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, onde desenvolve atividades de pesquisa e leciona na graduação e pós-graduação. Foi eleito recentemente membro da Academia Brasileira de Ciências.

Sumário

1 Indução Matemática **1**

1.1 O Princípio de Indução Matemática 1

1.2 Definição por Recorrência 14

1.3 Progressões 24

2 Indução e Mundo Material **31**

2.1 A Torre de Hanói 31

2.2 O Enigma do Cavalo de Alexandre 35

2.3 Descobrindo a Moeda Falsa 37

2.4 A Pizza de Steiner 38

2.5 Os Coelhos de Fibonacci 40

3 Indução e Matemática **45**

3.1 Somatórios 45

3.2 Binômio de Newton 54

3.3 Princípio do Menor Inteiro 59
3.4 O Princípio das Gavetas 68
3.5 Desigualdades 73

Respostas **83**

Introdução

Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista.

É com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é, ao mesmo tempo, sutil e delicado.

O material aqui apresentado é uma pequena seleção de assuntos relacionados com esse tema, cujo desenvolvimento se espalha por cerca de dois mil anos, originando-se nos magníficos trabalhos dos Gregos Antigos, que têm em *Os Elementos* de Euclides, de aproximadamente 300 a.C., o seu ponto culminante.

Estas notas se destinam a você, aluno do Ensino Médio, que está envolvido em atividades promovidas pela OBMEP. Elas cobrem assuntos que provavelmente não lhe foram ensinados, pelo menos com este grau de detalhe nem de profundidade, na escola, mas que, na minha opinião, como mencionado acima, deveriam fazer parte de sua bagagem cultural.

Não tenho a expectativa de que você absorva todo o material

aqui apresentado numa primeira leitura, pois ele possui um grau de abstração um pouco maior do que o costumeiro nessa fase de sua formação. Estude estas notas, procure entender os exemplos e, sobretudo, tente seriamente resolver os problemas, pois nunca esqueça que a Matemática só se aprende fazendo. Se necessário, volte a elas depois de algum tempo, pois, assim procedendo, você estará plantando uma semente que lhe trará valiosos frutos.

Finalmente, não poderia encerrar essa introdução antes de agradecer à Coordenação da OBMEP pelo convite para escrever este texto e ao meu colega Dinamérico Pereira Pombo Jr. pela leitura cuidadosa do manuscrito.

Niterói, julho de 2007.

Abramo Hefez

Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

Para o Professor

O nosso ponto de vista, nessas notas, é que o estudante do Ensino Médio tem, de modo intuitivo e bastante vago, uma certa familiaridade com os números, sejam eles naturais, inteiros, racionais ou reais. Apesar disso, ele não tem a menor dúvida sobre a sua existência (as dúvidas são em geral de outra natureza: racionais *versus* irracionais) e conhece bem algumas de suas propriedades como, por exemplo, o fato desses conjuntos possuírem uma adição e uma multiplicação com as propriedades usuais. Optamos por não ignorar esse conhecimento; muito pelo contrário, utilizá-lo-emos como ponto de partida (ou seja, implicitamente, como axioma zero) do nosso estudo.

Enfatizamos, logo no início do texto, que esse conhecimento é insuficiente para provar qualquer fato significativo. Mostramos então, na melhor tradição das teorias axiomáticas, como, isolando algumas propriedades (no nosso caso, as propriedades (1), (2) e (3), no início do Capítulo 1) que caracterizam os números naturais dentro do conjunto dos números reais, é possível demonstrar muitas das suas demais propriedades. Assim, esperamos convencer o jovem leitor da necessidade de fundamentar melhor os seus conceitos e das vantagens do método axiomático.

Decidimos, deliberadamente, nessas notas não descrever a trajetória do desenvolvimento dos números reais e de sua fundamentação rigorosa, pois, nesse caso, o caminho seria longo e certamente prematuro para a grande maioria dos leitores aos quais se destinam estas notas. Por outro lado, se tivéssemos iniciado a exposição com os axiomas de Peano, teríamos que arcar com o ônus da construção

das operações de adição e de multiplicação e da prova de suas propriedades, trabalho esse que consumiria algum esforço e desinteressaria a maioria dos leitores. Por outro lado, para poder prosseguir com as notas, a um certo momento, teríamos de aceitar a existência dos números reais, pois estes são livremente utilizados no texto, o que recairia no mesmo impasse do início.

A título de conforto para os mais ortodoxos sobre os Fundamentos da Matemática, pedimos que imaginem que o que estamos fazendo moralmente (i.e. de modo implícito) nestas notas é axiomatizar a existência dos números reais como corpo ordenado completo (veja Elon Lages Lima, Análise Real, Volume 1, Seção 3, Capítulo 2) e admitir que $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{R}$ (ib. Teorema 3 (i), página 17), que será por nós caracterizado univocamente por três propriedades explicitadas logo no início do texto.

Capítulo 1

Indução Matemática

Dentre todos os números que o ser humano já considerou, os números naturais foram os primeiros a serem criados, inicialmente com o intuito de contar. Apesar desses números serem os mais simples, isso, absolutamente, não quer dizer que eles sejam totalmente entendidos, havendo ainda muitos mistérios que os cercam a serem desvendados.

1.1 O Princípio de Indução Matemática

Mas, afinal, o que é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais?

Bem, podemos intuitivamente descrevê-lo dizendo quais são os seus elementos; eles são os números reais da forma:

$$1,\ \ 2 = 1+1,\ \ 3 = 2+1 = (1+1)+1,\ \ 4 = 3+1 = (1+1+1)+1,\ \ \cdots$$

Ocorre, porém, que dificilmente poderemos provar alguma propriedade desses números utilizando apenas esta descrição, pois, apesar de sabermos intuitivamente quais são os números que os pontinhos acima representam, teríamos dificuldade de descrevê-los de modo suficientemente explícito.

Uma alternativa consiste em dar algumas propriedades que caracterizem de modo inequívoco o conjunto dos naturais dentro do conjunto dos números reais.

Inicialmente, considere um subconjunto S dos números reais que possui as seguintes propriedades:

(1) S contém o número 1.

(2) Toda vez que S contém um número n, ele necessariamente contém o número $n+1$.

(3) Não existe subconjunto próprio de S satisfazendo as condições (1) e (2).

Em outras palavras, (3) nos diz que se S possui as propriedades (1), (2) e (3), acima, e se S' é um subconjunto de S que possui as propriedades (1) e (2), então $S' = S$.

Vamos provar que se existe um subconjunto S dos números reais satisfazendo às três condições acima, então esse conjunto é único. De fato, se S_1 e S_2 são dois os subconjuntos, temos que $S_1 \cap S_2$ possui as propriedades (1) e (2), logo pela propriedade (3) segue que

$$S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2.$$

No estágio em que estamos não temos como provar que tal conjunto S existe. Portanto, admitiremos o seguinte axioma:

Axioma: Existe um subconjunto dos reais que possui as propriedades (1), (2) e (3).

Esse **único** subconjunto será chamado de *conjunto dos números naturais* e denotado por $\mathbb{N}$.

A propriedade (3) é o que se chama de *Princípio de Indução Matemática.* Mais precisamente:

Princípio de Indução Matemática: Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S, o número $n+1$ também pertence a S, tem-se que $S = \mathbb{N}$.

Esta simples propriedade fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração em Matemática: a demonstração por indução.

Suponha que seja dada uma sentença matemática $P(n)$ que dependa de uma variável natural n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer. Tais sentenças serão ditas *sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos naturais.*

A seguir damos alguns exemplos de sentenças abertas definidas sobre $\mathbb{N}$:

(a) $P(n):\ n$ é par.

É claro que a afirmação $P(1)$ é falsa, pois ela diz que 1 é par;

$P(3)$, $P(5)$ e $P(9)$ são falsas, pois afirmam, respectivamente, que 3, 5 e 9 são pares.

Por outro lado, é também claro que $P(2)$, $P(4)$, $P(8)$ e $P(22)$ são verdadeiras, pois 2, 4, 8 e 22 são pares.

(b) $P(n):\ n$ é múltiplo de 3.

Temos, por exemplo, que $P(1), P(2), P(4)$ e $P(5)$ são falsas, enquanto $P(3)$ e $P(6)$ são verdadeiras.

(c) $P(n):\ 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Temos que $P(1), P(2), P(3), P(4), \ldots, P(10)$ são verdadeiras.

Aqui sabemos precisamente o que significa a sentença aberta $P(n)$, apesar dos pontinhos na sua definição. Ela significa:

"A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2."

Você consegue visualizar algum número natural m tal que $P(m)$ seja falsa? Bem, após mais algumas tentativas, você se convencerá de que esta fórmula tem grandes chances de ser verdadeira para todo número natural n; ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $P(n):\ n^2 - n + 41$ é um número primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

É fácil verificar que as sentenças $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ são verdadeiras. Com algum trabalho, é possível ir além, verificando também que $P(4)$, $P(5)$, ..., $P(35)$ são verdadeiras.

Portanto, é plausível que tenhamos encontrado um polinômio cujos valores nos números inteiros sejam sempre números primos.

Mais alguns testes para confirmar a nossa suspeita? Lá vai, $P(36)$, $P(37)$, $P(38)$ e $P(40)$ são verdadeiras.

Podemos parar por aqui e nos sentir felizes com a nossa descoberta? Bom, para satisfazer os mais céticos, faremos só mais um teste com $n = 41$.

Note que $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo. Logo, para a nossa desilusão, $P(41)$ é falsa!

Para a sua informação, pode-se provar que não existe nenhum polinômio em uma variável com coeficientes inteiros cujos valores nos naturais sejam sempre números primos. Portanto, não havia *a priori* nenhuma chance de $P(n)$ ser verdadeira para todo número natural n.

Como provar então que uma sentença aberta definida sobre os naturais é sempre verdadeira? Você há de convir que não seria possível testar, um por um, todos os números naturais, pois eles são em número infinito. Portanto, será preciso encontrar algum outro método.

Vamos a seguir expor a técnica da demonstração por indução matemática que resolverá esse nosso problema.

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre os naturais e denote por V o seu *conjunto verdade* em $\mathbb{N}$, isto é, o subconjunto de $\mathbb{N}$, definido como

$$V = \{n \in \mathbb{N};\ P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrar que $V = \mathbb{N}$.

Isso pode ser feito usando o Princípio de Indução Matemática.

Basta, para isto, mostrar que 1 pertence a V e que $n+1$ pertence a V, toda vez que n pertence a V.

Provamos, assim, o seguinte teorema:

Teorema 1.1.1 (Prova por Indução Matemática)**.** *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que*

(i) *$P(1)$ é verdadeira; e*

(ii) *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural n, da fórmula

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Observe que $P(1)$ é verdadeira, já que a fórmula é trivialmente válida para $n = 1$. Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira; ou seja, que

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeira. Somando $2n+1$, que é o próximo número ímpar após $2n-1$, a ambos os lados da igualdade acima, obtemos a igualdade também verdadeira:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Isso mostra que $P(n+1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a fórmula é válida para todo número natural n.

Você tem ideia de quando foi feita pela primeira vez a demonstração acima? Bem, o primeiro registro que se tem é de 1575 e foi realizada por Francesco Maurolycos.

Note que, na demonstração acima, poderia parecer que estamos usando o fato de $P(n)$ ser verdadeira para deduzir que $P(n+1)$ é verdadeira para em seguida concluir que $P(n)$ é verdadeira. O que está ocorrendo? Estamos usando a tese para provar o teorema?

A resposta é não! Preste bem atenção, pois essa é a parte mais delicada de toda a história.

Dado um número natural n, temos duas possibilidades:

(a) $P(n)$ é verdadeira, ou (b) $P(n)$ é falsa.

A hipótese (ii) do Teorema não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de n, ou mesmo para todos os valores de n. O que a hipótese (ii) exige é que sempre que algum n pertença à categoria (a) acima, então $n+1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando n pertencer à categoria (b).

Por exemplo, a sentença aberta $P(n) : n = n+1$ satisfaz (por vacuidade) à hipótese (ii) do Teorema, já que nenhum $n \in \mathbb{N}$ pertence à categoria (a). O que falha para que o Teorema nos garanta que $P(n)$ é verdadeira para todo n é que a hipótese (i) não é verificada, pois $P(1) : 1 = 2$ é falsa!

É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da

indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira.

A indução empírica foi batizada, de modo irônico, pelo matemático, filósofo e grande humanista inglês do século passado, Bertrand Russel (1872-1970), de *indução galinácea*, com base na seguinte historinha:

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.

Exemplo 1.1.1. Queremos determinar uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais.

Conta-se a seguinte história sobre o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855)[1], quando ainda garoto. Na escola, o pro-

[1] Gauss é considerado um dos maiores gênios da matemática de todos os tempos.

fessor, para aquietar a turma de Gauss, mandou os alunos calcularem a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Qual não foi a surpresa quando, pouco tempo depois, o menino deu a resposta: 5 050. Indagado como tinha descoberto tão rapidamente o resultado, Gauss, então com nove anos de idade, descreveu o método a seguir.

Sendo

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n,$$

o objetivo é encontrar uma *fórmula fechada*[2] para S_n.

Somando a igualdade acima, membro a membro, com ela mesma, porém com as parcelas do segundo membro em ordem invertida, temos que

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}.$$

Daí segue-se que $2S_n = n(n+1)$ e, portanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos ser críticos com relação à prova acima. Para a maioria das pessoas, essa prova parece impecável, mas se alguém nos perguntasse o que está escondido atrás dos pontinhos, talvez nos sentíssemos embaraçados. Também, como ter absoluta certeza de que nada acontece

[2] Uma fórmula fechada, a grosso modo, é uma fórmula que depende dos dados iniciais do problema e que permite calcular diretamente os valores do objeto em estudo fazendo um número pequeno de contas.

fora do nosso controle, exatamente na imensa região coberta pelos pontinhos?

Para não pairar nenhuma dúvida sobre o nosso resultado, vamos provar a fórmula utilizando Indução Matemática.

Considere a sentença aberta sobre os naturais

$$P(n): \; 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Note que

$$P(1): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

é verdadeira.

Observe também que

$$P(n+1): \; 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Agora, suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeira, isto é, a fórmula (1.1) é válida para tal valor de n. Somando $n + 1$ a ambos os lados dessa igualdade, temos que é verdadeira a igualdade

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de $P(n+1)$.

Pelo teorema, tem-se que a fórmula $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.2. Queremos validar a fórmula

$$P(n): \; 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

Note que

$$P(1): \; 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

é verdadeira.

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, isto é, (1.2) é válida. Somando $(n+1)^2$ a ambos os lados da igualdade (1.2), temos que

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

estabelecendo assim a veracidade de $P(n+1)$.

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.3. Vamos provar que é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$, a

fórmula:

$$P(n): \quad \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{1.3}$$

Observemos inicialmente que

$$P(1): \quad \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$$

é verdadeira.

Suponhamos que, para algum n, tem-se que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, que a fórmula (1.3) seja verdadeira para esse valor de n. Somando a ambos os lados dessa igualdade $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

mostrando, assim, que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Teorema 1.1.1, temos que a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problemas

1.1.1 Mostre, por indução, a validade das seguintes fórmulas:

(a) $1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

1.1.2 Mostre, por indução, a validade das seguintes fórmulas:

(a) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

(b) $\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

(c) $\dfrac{1}{1.5} + \dfrac{1}{5.9} + \dfrac{1}{9.13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

(d) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

(e) $\dfrac{1^2}{1.3} + \dfrac{2^2}{3.5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

1.1.3 Mostre, para $n, m \in \mathbb{N}$, que

$$1 \cdot 2 \cdots m + 2 \cdot 3 \cdots m(m+1) + \cdots + n(n+1)\cdots(n+m-1) =$$

$$\frac{1}{m+1}n(n+1)\cdots(n+m).$$

Sugestão: Fixe m arbitrário e proceda por indução sobre n.

1.1.4 Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

Sugestão: Considere a sentença aberta

$$P(n) : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ é divisível por } 9,$$

e mostre, por indução, que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5 Dada a sentença aberta em $\mathbb{N}$:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1,$$

mostre que:

(i) Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

(ii) $P(n)$ não é verdadeira para nenhum valor de $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Definição por Recorrência

Recorde que fizemos objeções na seção anterior ao uso dos pontinhos nas demonstrações de algumas fórmulas; não que sejamos contra, eles ajudam muito a representar situações em que há um número grande (eventualmente infinito) de objetos a serem descritos e a visualizar propriedades desses objetos.

Nessas notas, estamos tentando mostrar como se pode estabelecer um maior padrão de rigor no tratamento de certos problemas matemáticos, mas isso não deve ser tomado ao pé da letra. Certos argumentos informais, quando acompanhados de um raciocínio correto,

são corriqueiramente aceitos. Por exemplo, o argumento utilizado por Gauss para somar os n primeiros números naturais é perfeitamente aceitável. Portanto, um conselho: use o formalismo para ajudar e não para atrapalhar; nunca deixe ele se sobrepor à criatividade, pois, em regra, primeiro vem a descoberta, e depois, a formalização.

Voltemos agora ao problema que queremos abordar. O que realmente significa uma expressão da forma

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1),$$

que consideramos no Exemplo 1.1.1?

Apesar de intuirmos o que se quer dizer, isso formalmente ainda não faz sentido, pois a operação de adição de números é definida para um par de números, e aqui temos n números sendo somados de uma só vez, além do "inconveniente" dos pontinhos, é claro. Para dar um sentido preciso a esse tipo de expressão, vamos ver como a Indução Matemática pode nos ajudar.

Para definir uma expressão E_n, para todo número natural n, basta definirmos E_1 e mostrar como obter E_{n+1} a partir de E_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, para verificar que temos efetivamente uma definição para todo número natural n, consideremos a sentença aberta

$$P(n): \quad E_n \ \text{ está definido}$$

e provemos, por Indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por construção dos E_n, temos que:

(i) $P(1)$ é verdadeira.

(ii) Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é também verdadeira.

Portanto, pelo Teorema 1.1.1, temos que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Nesse caso, dizemos que E_n foi *definido por recorrência.*

Para continuarmos a nossa discussão, precisaremos de um conceito que não introduzimos ainda, mas do qual você certamente já ouviu falar.

Você sabe o que é uma sequência? Certamente você já foi apresentado à seguinte definição:

"Seja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ uma sequência de números em que cada elemento a_n, a partir do segundo, é igual ao anterior a_{n-1} somado com um número constante r."

Isso é o que se chama de *Progressão Aritmética.*

Mas, o que é uma sequência em geral? Uma sequência, como sugere o nome, é uma "coleção de elementos" de natureza qualquer, ordenados. Na verdade, trata-se apenas de elementos de um conjunto etiquetados com os números naturais.

Etiquetar com os números naturais os elementos de um conjunto

A, significa dar uma função

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ & n & \mapsto & a(n) \end{array}$$

A definição formal de uma sequência em um conjunto A é apenas uma função a de $\mathbb{N}$ em A.

Como uma função é dada quando se conhece a imagem de todos os elementos do seu domínio, uma sequência a pode ser representada como

$$a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots;$$

ou ainda, denotando $a(n)$ por a_n, podemos representá-la por

$$(a_n): \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Quando dissermos que um conjunto A possui uma adição ou uma multiplicação satisfazendo às leis básicas da aritmética, estaremos supondo que em A está definida uma operação com propriedades semelhantes à correspondente operação nos reais.

Exemplo 1.2.1. Seja (a_n) uma sequência de elementos de um conjunto munido de uma adição sujeita às leis básicas da aritmética. Para dar sentido às somas

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

basta definir recorrentemente S_n.

Pomos $S_1 = a_1$ e, supondo S_n definido, definimos

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Somas como S_n serão também denotadas com a notação de somatórios:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

que se lê como "somatório quando i varia de 1 até n de a_i".

Um conceito que se define naturalmente por recorrência é o fatorial de um número natural.

Exemplo 1.2.2. Define-se o *fatorial* $n!$ de um número natural n como:

$$1! = 1, \quad \text{e} \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Outro conceito que, naturalmente, é definido por recorrência é o de potência.

Exemplo 1.2.3. Seja a um elemento de um conjunto A munido de uma multiplicação sujeita às leis básicas da aritmética. Vamos definir as potências a^n, com $n \in \mathbb{N}$, por recorrência.

Ponhamos $a^1 = a$. Supondo a^n definido, defina

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Vamos estabelecer, por meio de indução, as propriedades usuais das potências.

Proposição 1.2.1. *Sejam* $a, b \in A$ *e* $m, n \in \mathbb{N}$. *Então,*

(i) $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$;

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Demonstração. Provaremos (i), deixando o restante como exercício.

Fixemos $a \in A$ e $m \in \mathbb{N}$, arbitrariamente. Demonstremos a propriedade por indução sobre n.

Para $n = 1$, a propriedade é válida, pois, pelas definições,

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Por outro lado, supondo que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, temos que:

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}.$$

Isso, pelo Teorema 1.1.1, prova a nossa propriedade. □

Exemplo 1.2.4. Vamos provar que 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$, nos inteiros, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, para $n = 1$, temos que 3 divide $5^1 + 2 \cdot 11^1 = 27$.

Suponha, agora, que, para algum $n \geq 1$, saibamos que 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$. Logo, existe um número inteiro a tal que

$$5^n + 2 \cdot 11^n = 3a.$$

Multiplicando por 5 ambos os lados da igualdade acima, temos

$$5 \cdot 3a = 5^{n+1} + 5 \cdot 2 \cdot 11^n = 5^{n+1} + 2 \cdot 11 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n.$$

Daí segue a igualdade

$$5^{n+1} + 2 \cdot 11^{n+1} = 5 \cdot 3a + 12 \cdot 11^n,$$

cujo segundo membro é divisível por 3 por ser igual a $3(5a + 4 \cdot 11^n)$.

Assim, provamos que 3 divide $5^{n+1}+2\cdot 11^{n+1}$, o que, pelo Teorema 1.1.1, acarreta que 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$, para todo número natural n.

Pode ocorrer que uma determinada propriedade seja válida para todos os números naturais a partir de um determinado valor a, mas não necessariamente para valores menores. Como proceder nesses casos?

Por exemplo, como provar que a desigualdade $2^n > n^2$ é verdadeira para todo valor de n natural maior do que ou igual a 5?

Fazemos isso baseados na seguinte pequena generalização do Teorema 1.1.1:

Teorema 1.2.1. *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$, e seja $a \in \mathbb{N}$. Suponha que*

(i) *$P(a)$ é verdadeira, e*

(ii) *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue-se que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq a$.

Demonstração. Defina o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N};\; P(m + a - 1) \text{ é verdadeira}\}.$$

Por (i) temos que $1 \in S$. Por outro lado, se $m \in S$, temos que $P(m+a-1)$ é verdadeira. Logo, por (ii), $P(m+1+a-1)$ é verdadeira. Portanto, $m + 1 \in S$. Em vista do Teorema 1.1.1, temos que $S = \mathbb{N}$. Consequentemente, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$. □

Exemplo 1.2.5. Vamos mostrar que a desigualdade na sentença aberta $P(n) : 2^n > n^2$ é verdadeira, para todo número natural $n \geq 5$.

Note que $P(1) : 2^1 > 1^2$ é verdadeira, $P(2) : 2^2 > 2^2$ é falsa, $P(3) : 2^3 > 3^2$ é falsa e $P(4) : 2^4 > 4^2$ é falsa. Tudo isso não importa, pois queremos verificar a veracidade dessa desigualdade para $n \geq 5$.

De fato, temos que $P(5) : 2^5 > 5^2$ é verdadeira. Seja $n \geq 5$ tal que $2^n > n^2$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por 2, obtemos $2^{n+1} > 2n^2$. Note que $2n^2 > (n + 1)^2$, se $n \geq 3$, pois tal desigualdade é equivalente a $n(n - 2) > 1$. Daí, deduzimos que $2^{n+1} > (n + 1)^2$, o que significa que $P(n + 1)$ é verdadeira, estabelecendo o resultado em vista do Teorema 1.2.1.

Exemplo 1.2.6. Vamos mostrar que a sentença aberta:

$$\text{a equação } 3x + 5y = n \text{ tem solução em } (\mathbb{N} \cup \{0\})^2,$$

é verdadeira para todo $n \geq 8$.

De fato, ela é verdadeira para $n = 8$, pois a equação $3x + 5y = 8$ admite a solução $(x, y) = (1, 1)$.

Suponha agora que a equação $3x + 5y = n$ tenha uma solução (a, b) para algum $n \geq 8$; isto é, $3a + 5b = n$. Note que, para qualquer solução (a, b), devemos ter $a \geq 1$ ou $b \geq 1$.

Se $b \geq 1$, observando que $3 \times 2 - 5 \times 1 = 1$, segue que

$$3(a + 2) + 5(b - 1) = 3a + 5b + 3 \times 2 - 5 \times 1 = 3a + 5b + 1 = n + 1,$$

o que mostra que a equação $3x + 5y = n + 1$ admite a solução $(a + 2, b - 1)$ em $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$.

Se, por acaso, $b = 0$, então, $a \geq 3$; usando a igualdade

$$-3 \times 3 + 5 \times 2 = 1,$$

temos

$$3(a - 3) + 5 \times 2 = 3a - 3 \times 3 + 5 \times 2 = 3a + 5b + 1 = n + 1,$$

o que mostra que a equação $3x + 5y = n + 1$ admite a solução $(a - 3, b + 2)$ em $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$.

Mostramos assim que, em qualquer caso, a equação $3x+5y = n+1$ admite solução, sempre que a equação $3x+5y = n$, para algum $n \geq 8$, tenha solução. Como o resultado vale para $n = 8$, segue a conclusão desejada pelo Teorema 1.2.1.

Note que $n_0 = 8$ é o menor valor de n para o qual a equação tem solução para todo $n \geq n_0$.

Problemas

1.2.1 Mostre, por indução, a validade das seguintes fórmulas:

(a) $1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \cdots + n.2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n.$

(b) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$

(c) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1.$

1.2.2 Sejam a e b números reais distintos. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}b + a^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}.$$

1.2.3 Se $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2^2\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}$$

SUGESTÃO: Use a fórmula $\operatorname{sen} 2\beta = 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$.

1.2.4 Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que, nos inteiros,

(a) 80 divide $3^{4n} - 1$;

(b) 9 divide $4^n + 6n - 1$;

(c) 8 divide $3^{2n} + 7$;

(d) 9 divide $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$.

1.2.5 Mostre que:

(a) $n! > 2^n$, se $n \geq 4$.

(b) $n! > 3^n$, se $n \geq 7$.

(c) $n! > 4^n$, se $n \geq 9$.

1.2.6 Prove que, para todo n natural, vale a desigualdade:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

1.2.7 Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

1.2.8 Mostre que $n_0 = 32$ é o menor valor para o qual a equação $5x + 9y = n$ possui solução em $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ para todo $n \geq n_0$.

1.3 Progressões

Iremos agora, usando recorrência, definir progressões aritméticas e progressões geométricas.

Exemplo 1.3.1. Uma *Progressão Aritmética* (P.A.) é uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} somado a um número fixo r chamado de razão.

Portanto, é dado o primeiro termo a_1 e define-se recorrentemente

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad \text{se } n \geq 2.$$

Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r, \quad a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r.$$

Pelo "método da galinha" de Bertrand Russel, já podemos adivinhar os próximos termos:

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r,\ a_6 = a_1 + 5r,\ \ldots,\ a_n = a_1 + (n-1)r,\ \ldots$$

Portanto, parece plausível que a fórmula para o termo geral de uma P.A. de primeiro termo a_1 e razão r seja

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora demonstrar essa fórmula por indução.

Inicialmente, observe que a fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois ela se reduz à igualdade $a_1 = a_1$.

Suponha agora que a fórmula seja correta para algum $n \in \mathbb{N}$; isto é, que $a_n = a_1 + (n-1)r$. Somando r a ambos os lados dessa igualdade, segue a igualdade:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr,$$

o que mostra que a fórmula é verdadeira para $n+1$. Portanto, ela é correta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que, numa P.A., tem-se que

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-i+1} &= [a_1 + (i-1)r] + [a_1 + (n-i)r] \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)r \qquad (1.4) \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Agora, nos propomos a achar uma fórmula para a soma

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

dos n primeiros termos de uma P.A. (a_n).

Vamos usar, para isso, o método de Gauss que exibimos no Exemplo 1.1.1.

Somando a igualdade acima, membro a membro, com ela mesma, porém com as parcelas do segundo membro em ordem invertida, temos, por (1.4) que

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + \cdots + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + \cdots + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1+a_n) & + & (a_2+a_{n-1}) & + \cdots + & (a_n+a_1) \end{array}.$$

Daí, segue-se que $2S_n = (a_1 + a_n)n$ e, portanto,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Deixamos a validação dessa fórmula por indução como exercício.

Exemplo 1.3.2. Uma *Progressão Geométrica* (P.G.) é uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} multiplicado por um número fixo q chamado de razão.

Portanto, é dado o primeiro termo a_1 e define-se recorrentemente

$$a_n = a_{n-1}q, \quad \text{se } n \geq 2.$$

Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que

$$a_2 = a_1q, \quad a_3 = a_2q = a_1q^2, \quad a_4 = a_3q = a_1q^3, \quad a_5 = a_4q = a_1q^4.$$

Novamente, pelo "método da galinha" de Bertrand Russel, podemos adivinhar os próximos termos:

$$a_6 = a_1q^5, \quad a_7 = a_1q^6, \quad \dots, \quad a_n = a_1q^{n-1}, \quad \dots$$

Portanto, é plausível que a fórmula para o termo geral de uma P.G. de primeiro termo a_1 e razão q seja $a_n = a_1q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos demonstrar essa fórmula por indução.

Inicialmente, observe que a fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois ela se reduz à igualdade $a_1 = a_1$.

Suponha, agora, que a fórmula seja correta para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $a_n = a_1q^{n-1}$. Multiplicando por q ambos os lados dessa

igualdade, segue que

$$a_{n+1} = a_n q = a_1 q^{n-1} q = a_1 q^n,$$

o que mostra que a fórmula é correta para $n+1$. Portanto, ela é correta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos, a seguir, achar uma fórmula para a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G.

Vejamos se, animados pelo "truque" de Gauss, achamos uma solução inteligente para esse problema.

Escreva

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}.$$

Note que

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\ &\quad -a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - \cdots - a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 q^n - a_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

Problemas

1.3.1 Ache uma fórmula fechada para cada uma das somas:

(a) $2 + 4 + \cdots + 2n$.

(b) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1)$.

1.3.2 Ache uma fórmula fechada para cada uma das somas:

(a) $2 + 4 + \cdots + 2^n$.

(b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.

Para quanto tende a soma em (b) quando o número de parcelas aumenta indefinidamente?

1.3.3 Uma vitória régia encontra-se em um tanque de água. Sabendo que ela dobra de área a cada dia e que, no final de 20 dias, ocupa toda a superfície do tanque, em qual dia ela ocupará a metade da superfície do tanque?

COMENTÁRIO: Esse problema admite duas soluções, uma usando fórmulas, outra usando a cabeça.

1.3.4 Em uma cidade de 5 000 habitantes, alguém resolve espalhar um boato. Considerando que, a cada 10 minutos, uma pessoa é capaz de contar o caso para 3 pessoas desinformadas, determine em quanto tempo toda a cidade fica conhecendo o boato.

1.3.5 Uma *progressão aritmético-geométrica* é uma sequência (a_n) tal que a_1, q e r são números reais dados, com $q \neq 1$, e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = qa_n + r.$$

(a) Mostre que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}$.

(b) Se $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, mostre que

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} + r\frac{q^n-1}{(q-1)^2} + r\frac{n}{1-q}.$$

(c) Ache o termo geral e a soma dos n primeiros termos da progressão aritmético-geométrica onde $a_1 = 1$, $q = 2$ e $r = 1$.

Capítulo 2

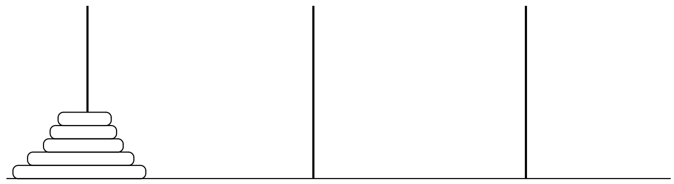
Indução e Mundo Material

Neste capítulo, mostraremos algumas aplicações da indução matemática ao mundo material.

2.1 A Torre de Hanói

Você provavelmente já conhece esse jogo, pois trata-se de um jogo bastante popular que pode ser facilmente fabricado ou ainda encontrado em lojas de brinquedos de madeira.

O jogo é formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor (veja figura a seguir).



O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra acima seja observada.

As perguntas naturais que surgem são as seguintes:

1. O jogo tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$?
2. Em caso afirmativo, qual é o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

Usando Indução Matemática, vamos ver que a resposta à primeira pergunta é afirmativa, qualquer que seja o valor de n. Em seguida, deduziremos uma fórmula que nos fornecerá o número j_n.

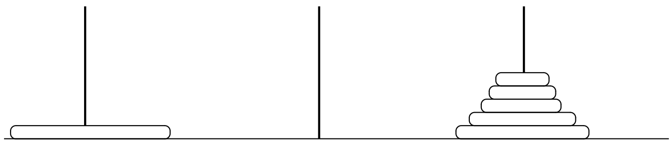
Considere a sentença aberta

$$P(n): \quad \text{O jogo com } n \text{ discos tem solução.}$$

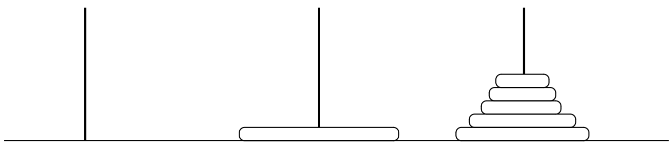
Obviamente, $P(1)$ é verdade. Suponha que $P(n)$ seja verdadeiro, para algum n; ou seja, que o jogo com n discos tem solução. Vamos provar que o jogo com $n+1$ discos tem solução.

Para ver isso, resolva inicialmente o problema para os n discos

superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livre (isso é possível, pois estamos admitindo que o problema com n discos possua solução):

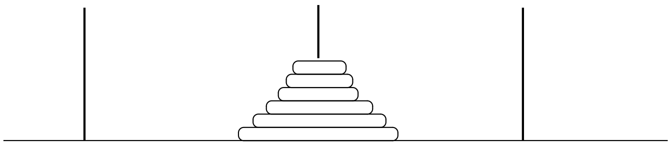


Em seguida, transfira o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia:



Feito isto, resolva novamente o problema para os n discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos:

Isso mostra que o problema com $n + 1$ discos também possui solução, e, portanto, por Indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira



para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para determinar uma fórmula para j_n, veja que, para resolver o problema para $n+1$ discos com o menor número de passos, temos, necessariamente, que passar duas vezes pela solução mínima do problema com n discos. Temos, então, que

$$j_{n+1} = 2j_n + 1.$$

Obtemos, assim, uma progressão aritmético-geométrica (j_n) cujo termo geral é, pelo Problema 1.3.5 (c), dado por

$$j_n = 2^n - 1.$$

Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882, que, para dar mais sabor à sua criação, inventou a seguinte lenda:

Na origem do tempo, num templo oriental, Deus colocou 64 discos perfurados de ouro puro ao redor de uma de três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos de uma

coluna para outra, respeitando as regras acima explicadas. Quando todos os 64 discos fossem transferidos para uma outra coluna, o mundo acabaria.

Você não deve se preocupar com a iminência do fim do mundo, pois, se, a cada segundo, um sacerdote movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a fatalidade seria de $2^{64}-1$ segundos e isto daria, aproximadamente, um bilhão de séculos!

2.2 O Enigma do Cavalo de Alexandre

Num mosaico romano, Bucéfalo, o cavalo de Alexandre, o Grande, é representado como um fogoso corcel cor de bronze. Nesse exemplo, vamos "provar" que isso é uma falácia (uma grande mentira).

Inicialmente, "provaremos" que todos os cavalos têm mesma cor. De fato, considere a sentença aberta:

$P(n)$: Num conjunto com n cavalos, todos têm a mesma cor.

Note que $P(1)$ é obviamente verdadeira. Agora, suponha o resultado válido para conjuntos contendo n cavalos. Considere um conjunto

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$$

com $n+1$ cavalos. Decompomos o conjunto $\mathcal{C}$ numa união de dois conjuntos:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'' = \{C_1, \ldots, C_n\} \cup \{C_2, \ldots, C_{n+1}\},$$

cada um dos quais contém n cavalos.

Pela hipótese indutiva, segue-se que os cavalos em $\mathcal{C}'$ têm mesma cor, ocorrendo o mesmo para os cavalos em $\mathcal{C}''$. Como

$$C_2 \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'',$$

segue-se que os cavalos de $\mathcal{C}'$ têm a mesma cor dos cavalos de $\mathcal{C}''$, permitindo assim concluir que todos os cavalos em $\mathcal{C}$ têm a mesma cor.

Assim, a nossa "demonstração" por indução está terminada, provando que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, todo mundo sabe (você sabia?) que Marengo, o famoso cavalo de Napoleão, era branco. Logo, Bucéfalo deveria ser branco.

Onde está o erro nessa prova? Para achá-lo, sugerimos que você tente provar que, se $P(1)$ é verdadeira, então $P(2)$ é verdadeira.

Esse problema foi inventado pelo matemático húngaro George Pólya (1887-1985).

Problemas

2.2.1 Ache o erro na "prova" do seguinte "Teorema":

Todos os numeros naturais são iguais.

Demonstração. Vamos provar o resultado mostrando que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é verdadeira a sentença aberta

$P(n)$: Dado $n \in \mathbb{N}$, todos os número naturais menores ou iguais do que n são iguais.

(i) $P(1)$ é claramente verdadeira.

(ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, logo $n - 1 = n$. Somando 1 a ambos os lados dessa igualdade, obtemos $n = n + 1$. Como n era igual a todos os naturais anteriores, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$. □

2.3 Descobrindo a Moeda Falsa

Têm-se 2^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor do que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. Vamos mostrar, por indução sobre n, que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.

Para $n = 1$, isso é fácil de ver, pois, dadas as duas moedas, basta pôr uma moeda em cada prato da balança e descobre-se imediatamente qual é a moeda falsa.

Suponha, agora, que o resultado seja válido para algum valor de n e que se tenha que achar a moeda falsa dentre 2^{n+1} moedas dadas. Separemos as 2^{n+1} moedas em 2 grupos de 2^n moedas cada. Coloca-se um grupo de 2^n moedas em cada prato da balança. Assim, poderemos descobrir em que grupo de 2^n moedas encontra-se a moeda falsa. Agora, pela hipótese de indução, descobre-se a moeda falsa com n pesagens, que, junto com a pesagem já efetuada, perfazem o total de $n + 1$ pesagens.

No Capítulo 3, iremos generalizar esse problema, resolvendo-o

para um número qualquer de moedas.

Problemas

2.3.1 Mostre que o problema da moeda falsa para 3^n moedas também se resolve com n pesagens.

2.4 A Pizza de Steiner

O grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema:

Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

Pensando o plano como se fosse uma grande pizza, temos uma explicação para o nome do problema.

Denotando o número máximo de pedaços com n cortes por p_n, vamos provar por indução a fórmula:

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Para $n = 1$, ou seja, com apenas um corte, é claro que só podemos obter dois pedaços. Portanto, a fórmula está correta, pois

$$p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2.$$

Admitamos agora que, para algum valor de n, a fórmula para p_n

esteja correta. Vamos mostrar que a fórmula para p_{n+1} também está correta.

Suponhamos que, com n cortes, obtivemos o número máximo $n(n+1)/2+1$ de pedaços e queremos fazer mais um corte, de modo a obter o maior número possível de pedaços.

Vamos conseguir isso se o $(n+1)$-ésimo corte encontrar cada um dos n cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes (faça um desenho para se convencer disso).

Por outro lado, se o $(n+1)$-ésimo corte encontra todos os n cortes anteriores, ele produz $n+1$ novos pedaços: o corte começa em um determinado pedaço e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço, e assim sucessivamente, até encontrar o n-ésimo corte separando o último pedaço em que entrar em dois. Assim, são obtidos $n+1$ pedaços a mais dos que já existiam; logo,

$$p_{n+1} = p_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1,$$

mostrando que a fórmula está correta para $n+1$ cortes. O resultado segue então do Teorema 1.1.1.

Problemas

2.4.1 (O queijo de Steiner) Para fazer a sua pizza, Steiner teve que cortar, primeiro, o queijo. Imaginando que o espaço é um enorme queijo, você seria capaz de achar uma fórmula para o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos?

2.5 Os Coelhos de Fibonacci

Trata-se do seguinte problema proposto e resolvido pelo matemático italiano Leonardo de Pisa em seu livro *Liber Abacci*, de 1202:

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Como não se ensina mais latim nas escolas, aí vai uma explicação: um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

Leonardo apresenta a seguinte solução:

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Portanto, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Se denotarmos o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por u_n, temos, então, que

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad u_1 = u_2 = 1.$$

Essas relações definem, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de *sequência de Fibonacci*, cujos elementos, chamados de *números de Fibonacci*, possuem propriedades aritméticas notáveis, que ainda hoje são objeto de investigação.

Uma recorrência[1] do tipo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \tag{2.1}$$

só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_1 e x_2. A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência (2.1), onde $x_1 = x_2 = 1$.

Quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula fechada para o termo geral da sequência, isto é, uma fórmula que não recorre aos termos anteriores. No caso da

[1] Uma recorrência é uma fórmula que define um elemento de uma sequência a partir de termos anteriores.

sequência de Fibonacci, existe uma tal fórmula, chamada *fórmula de Binet*, que apresentamos a seguir.

Proposição 2.5.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que*

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Demonstração. Procuremos as progressões geométricas $v_n = q^n$, com $q \neq 0$, que satisfazem à recorrência (2.1). Temos que

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2},$$

cujas soluções são

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Defina $v_n = q_1^n$ e $w_n = q_2^n$. Note que, como as duas sequências v_n e w_n satisfazem à recorrência (2.1), então, para quaisquer α e β reais, a sequência $u_n = \alpha v_n + \beta w_n$ também satisfaz à recorrência. Agora, impomos $u_1 = u_2 = 1$, o que nos dá um sistema de duas equações com as duas incógnitas α e β, cujas soluções são $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. □

É notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci, que são números naturais. Mais notável, ainda, é que o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ seja a *proporção áurea* φ que aparece nas artes, e que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ seja o simétrico de seu inverso $-\varphi^{-1}$. Intrigante essa inesperada relação entre criar coelhos e a *divina proporção*, não?

Leonardo de Pisa (1170-1250), filho de Bonacci, e por isso apelidado Fibonacci, teve um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática no Ocidente. Em 1202, publicou o livro *Liber Abacci*, que continha grande parte do conhecimento sobre números e álgebra da época. Esta obra foi responsável pela introdução na Europa do sistema de numeração indo-arábico e pelo posterior desenvolvimento da álgebra e da aritmética no mundo ocidental.

Problemas

2.5.1 Mostre que a sequência de Fibonacci satisfaz às seguintes identidades:

(a) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.

(b) $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

(c) $u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$.

(d) $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$.

2.5.2 Sabendo que $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz da equação $x^2 = x + 1$, mostre que $q^n = u_n q + u_{n-1}$.

2.5.3 Prove que

$$u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}.$$

2.5.4 Dada a recorrência $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, com $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$, ache uma fórmula para a_n.

2.5.5 Mostre que a recorrência $v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}$, $v_0 = 2$ e $v_1 = 3$ tem por solução $v_n = 2^n + 1$.

Capítulo 3

Indução e Matemática

O Princípio de Indução Matemática possui inúmeras aplicações em Matemática. Neste capítulo, veremos algumas delas.

3.1 Somatórios

Vamos recordar a noção de somatório que introduzimos na Seção 2 do Capítulo 1.

Seja A um conjunto com duas operações satisfazendo às leis básicas da aritmética.

Se (a_n) é uma sequência em A, definimos o somatório dos seus n primeiros termos como sendo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Para apreciar o poder do que iremos apresentar, tente, neste exato momento, calcular a soma:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

Se conseguiu, parabéns! Se não conseguiu, não desanime, pois, com os instrumentos de que você dispõe até o momento, o problema é difícil. Veremos adiante como isso vai se transformar, como num passe de mágica, em algo fácil de calcular.

Provaremos a seguir alguns resultados bem simples sobre somatórios que irão nos ajudar a resolver este e muitos outros problemas do mesmo tipo.

Proposição 3.1.1. *Sejam* (a_i), (b_i) *duas sequências de elementos do conjunto* A *e seja* $c \in A$. *Então,*

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$;

(iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demonstração. (i) O que significa a soma $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$? Significa que estamos somando os n primeiros termos da nova sequência (c_n),

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $c_n = a_n + b_n$.

Provemos o resultado por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}(a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i,$$

mostrando que a fórmula é válida nesse caso.

Suponha a fórmula válida para algum número natural n. Temos então que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + (a_{n+1} + b_{n+1}) =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + (a_{n+1} + b_{n+1}) =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i,$$

mostrando assim que a fórmula é válida para $n + 1$. Pelo Teorema 1.1.1, temos que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A prova também se faz por indução e a deixamos como exercício.

(iii) Vamos provar, também por indução sobre n, esta fórmula. Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}(a_{i+1} - a_i) = a_2 - a_1,$$

o que mostra a validade da fórmula neste caso.

Suponhamos que a fórmula seja válida para um número natural

n. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) + (a_{n+2}-a_{n+1}) =$$

$$a_{n+1}-a_1+a_{n+2}-a_{n+1} = a_{n+2}-a_1,$$

mostrando que a fórmula vale para $n+1$ e, portanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) O somatório $\sum_{i=1}^{n} c$ representa a soma de n parcelas iguais a c, e, portanto, é igual a nc. □

Vejamos agora, com alguns exemplos, como podemos tirar partido deste resultado.

Exemplo 3.1.1. Vamos ao desafio, que lançamos acima, de calcular a soma:

$$S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

Com a notação de somatório, podemos escrever

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1).$$

Ora, aplicando o item (i) da proposição acima, temos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1). = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n),$$

somas estas que já calculamos nos Exemplos 1.1.1 e 1.1.2. Portanto, temos que

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

A fórmula do item (iii) da Proposição 3.1.1, chamada de soma telescópica, nos fornece um método para calcular termos gerais de certas recorrências e somas, como veremos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.2. Vamos deduzir a expressão do termo geral da recorrência da Pizza de Steiner:

$$p_{n+1} = p_n + n + 1, \qquad p_1 = 2.$$

A expressão acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$p_{i+1} - p_i = i + 1.$$

Tomando somatórios de ambos os lados, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1}(p_{i+1} - p_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(i+1).$$

O primeiro membro da igualdade acima é uma soma telescópica e vale $p_n - p_1$, enquanto o segundo membro é por nós conhecido e vale

$\dfrac{(n-1)n}{2}+n-1$. Portanto, temos que

$$p_n = \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 + 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 3.1.3. Seja $i \in \mathbb{N}$ e considere a seguinte identidade:[1]

$$(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

Daí, segue que

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

Tomando os somatórios de ambos os membros da igualdade acima e notando que o lado esquerdo é uma soma telescópica, obtemos

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = \sum_{i=1}^{n}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1).$$

Usando agora as propriedades (i) e (ii) dos somatórios enunciados na Proposição 3.1.1 e as fórmulas obtidas nos Exemplos 1.1.1 e 1.1.2,

[1] Esta identidade, que pode ser verificada diretamente, é um caso particular da fórmula do binômio de Newton, que estudaremos em geral na próxima seção.

obtemos

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{i=1}^{n}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) =$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + n =$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n.$$

Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} =$$

$$\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Obtemos, assim, a fórmula do Problema 1.1.1 (i):

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

É possível generalizar este procedimento para obter fórmulas recorrentes para as somas

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p,$$

quando p varia nos naturais (veja Problema 3.1.2).

Problemas

3.1.1 Calcule fórmulas fechadas para as seguintes somas:

(a) $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + n)$.

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n + 1)(n + 2)$.

(c) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n - 1)(2n + 1)$.

(d) $1 + (1 + 2^2) + (1 + 2^2 + 3^2) + \cdots + (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$.

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2$.

(f) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n - 1)^3$.

3.1.2

(a) Considere, para $i \in \mathbb{N}$, a seguinte identidade:

$$(i + 1)^5 - i^5 = 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1.$$

Efetue o somatório de ambos os lados para i variando de 1 até n. Utilizando os Problemas 1.1.1 e 1.1.2, determine uma fórmula para $\sum_{i=1}^{n} i^4$.

(b) Pense em um modo de calcular $\sum_{i=1}^{n} i^5$. Mostre como isto pode ser generalizado.

3.1.3 Demonstre a Propriedade (ii) na Proposição 3.1.1.

3.1.4 Prove as desigualdades:

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Sugestão: Mostre inicialmente que

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

e em seguida use somas telescópicas.

3.1.5 Seja $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ uma P.A. com de razão r. Calcule a soma

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}.$$

Este problema generaliza os Problemas 1.1.2 (a), (b) e (c).

Sugestão: Mostre inicialmente que

$$\frac{1}{a_ia_{i+1}} = -\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i}\right].$$

Tome o somatório, para i variando de 1 até n, em ambos o lados da igualdade acima e note que o somatório do lado direito é um múltiplo

de uma soma telescópica. Conclua que

$$S_n = -\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}\right] = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

3.2 Binômio de Newton

Considere a expressão $(1+X)^n$, onde X é uma indeterminada e n é um número natural. É claro que o desenvolvimento dessa potência é um polinômio de grau n em X, cujos coeficientes são números naturais (você pode provar esta afirmação por indução sobre n):

$$(1+X)^n = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n.$$

Os coeficientes a_i, $i = 0, \ldots, n$, serão chamados de *números binomiais* e denotados pelos símbolos $a_i = \binom{n}{i}$. Se $i > n$, é cômodo definir $\binom{n}{i} = 0$.

Observe que, tomando $X = 1$ no desenvolvimento de $(1+X)^n$, obtemos a seguinte identidade:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Queremos determinar fórmulas explícitas para esses números binomiais.

Como os coeficientes do termo independente de X, do termo em X e do termo em X^n no desenvolvimento de $(1+X)^n$ são, respecti-

vamente, 1, n e 1, temos que

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Lema 3.2.1 (Relação de Stifel)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq n$, tem-se que*

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Demonstração. Para $i = n$, a relação acima é trivialmente verificada. Para $0 \leq i < n$, as relações decorrem, imediatamente, das seguintes igualdades:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}X + \cdots + \binom{n+1}{n}X^n + \binom{n+1}{n+1}X^{n+1} =$$

$$(1+X)^{n+1} = (1+X)\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \cdots + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n\right] =$$

$$\binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]X + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]X^n + \binom{n}{n}X^{n+1}.$$

□

Lema 3.2.2. *Para todos $n, i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$, tem-se que*

$$i!\binom{n}{i} = n(n-1)\cdots(n-i+1).$$

Demonstração. Vamos provar isto por indução sobre n. A igualdade é

trivialmente verificada para $n = 1$. Suponha que as igualdades sejam válidas para algum $n \in \mathbb{N}$ e todo i com $1 \leq i \leq n$. Pela relação de Stifel, temos, para $i \leq n$, que

$$i!\binom{n+1}{i} = i(i-1)!\binom{n}{i-1} + i!\binom{n}{i} =$$

$$in(n-1)\cdots(n-i+2) + n(n-1)\cdots(n-i+1) =$$

$$n(n-1)\cdots(n-i+2)(i+n-i+1) =$$

$$(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-i+1),$$

o que prova a igualdade para $n+1$ e para todo i com $1 \leq i \leq n$. Uma verificação direta mostra que a fórmula também vale para $i = n+1$. Portanto, a igualdade vale para todo n e todo i com $1 \leq i \leq n$. □

Segue-se do Lema 3.2.2 que, para $n, i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$, vale a seguinte fórmula para os coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Note que os termos extremos nas igualdades acima têm sentido e são iguais quando $i = 0$.

Da fórmula acima, decorre imediatamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo i com $0 \leq i \leq n$, a seguinte identidade fundamental:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}.$$

Seja A um conjunto com duas operações, uma adição e uma multiplicação, sujeitas às leis básicas da aritmética.

Teorema 3.2.1 (Binômio de Newton)**.** *Sejam a e b elementos do conjunto A e seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Demonstração. Se $a = 0$, o resultado é óbvio. Se $a \neq 0$, substitua X por $\frac{b}{a}$ na expansão de $(1+X)^n$ e multiplique ambos os lados por a^n. □

Exemplo 3.2.1.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Problemas

3.2.1 Demonstre a *identidade das colunas*:

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}.$$

3.2.2 Demonstre a *identidade das diagonais*:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+m}{m}=\binom{n+m+1}{m}.$$

3.2.3

(a) Demonstre, para todos $n, m, k \in \mathbb{N}$, a *identidade de Euler*:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{n+m}{k}.$$

(b) Em particular, deduza a *identidade de Lagrange*:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}.$$

3.2.4

(a) Mostre que $\binom{n}{i}$ é o número de subconjuntos distintos com i elementos de um conjunto com n elementos.

(b) Mostre que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos tem 2^n elementos.

(c) Usando os itens acima, dê uma outra prova para a igualdade:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

3.2.5 Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1}, \text{ se } 0 \leq i < \frac{n-1}{2}; \quad \text{e que}$$

$$\binom{n}{i} > \binom{n}{i+1}, \text{ se } i > \frac{n-1}{2}.$$

3.3 Princípio do Menor Inteiro

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Dizemos que um número natural a é um menor elemento de S se possui as seguintes propriedades:

i) $a \in S$,

ii) $a \leq n$, para todo $n \in S$.

É imediato verificar que, se S possui um menor elemento, este é único. De fato, se a e a' são menores elementos de S, então $a \leq a'$, pois a é um menor elemento de S, e a' é um elemento de S, e, analogamente, $a' \leq a$, o que implica que $a = a'$.

O menor elemento de S, quando existe, é denotado por $\min S$.

Por que fizemos a ressalva acima sobre a existência de $\min S$? Se lhe parece tão óbvio que todo subconjunto não vazio dos naturais possua um menor elemento, tente prová-lo!

É preciso ter muito cuidado com as afirmações do tipo é *óbvio que*, pois devem ser utilizadas apenas quando qualquer um possa verificá-las sem grande esforço.

Vamos, agora, efetivamente provar o que parece óbvio.

Teorema 3.3.1 (Princípio do Menor Inteiro)**.** *Todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Demonstração. A demonstração será feita por redução ao absurdo.

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que S não possua um menor elemento. Mostraremos que S é vazio, conduzindo a uma contradição.

Considere o conjunto T, complementar de S em $\mathbb{N}$, ou seja, o conjunto dos números naturais que não estão em S. Queremos, portanto, mostrar que $T = \mathbb{N}$, ou seja, que $S = \emptyset$.

Defina o conjunto

$$I_n = \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\},$$

e considere a sentença aberta

$$P(n):\ I_n \subset T.$$

Como $1 \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $1 \in T$, pois, caso contrário, 1 seria um menor elemento de S. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que $P(n)$ seja verdadeira, para algum n. Se $n+1 \in S$, como nenhum elemento de I_n está em S, teríamos que $n+1$ é um menor elemento de S, o que não é permitido. Logo, $n+1 \in T$, seguindo daí que

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\} \subset T,$$

o que prova que, para todo n, temos que $I_n \subset T$; portanto, $\mathbb{N} \subset T \subset \mathbb{N}$ e, consequentemente, $T = \mathbb{N}$. □

Você entendeu a demonstração acima? Se não entendeu, não desanime, pois certamente ainda não está na hora de você apreciar todas estas sutilezas. Isto virá naturalmente com o tempo. Qual o remédio, então? Bem, faça de conta que realmente a afirmação contida no teorema é óbvia e siga em frente.

O Princípio do Menor Inteiro tem várias aplicações, conforme veremos ao longo deste capítulo. Como primeira aplicação, provaremos uma variante da Indução Matemática que é muito útil.

Teorema 3.3.2 (Indução Completa)**.** *Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta. Suponha que:*

i) *$P(a)$ é verdadeira, e que*;

ii) *qualquer que seja $n \geq a$, se $P(i)$ é verdadeira para todo $a \leq i \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$V = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq a \text{ e } P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Queremos provar que o conjunto $W = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq a\} \setminus V$ é vazio. Suponha, por absurdo, que vale o contrário. Logo, pelo Princípio do Menor Inteiro, W teria um menor elemento k, e, como sabemos de (i) que $a \notin W$, segue-se que existe n tal que $k = a + n > a$. Portanto,

$a, a+1, \ldots, k-1 \notin W$; logo $a, a+1, \ldots, k-1 \in V$. Por (ii), conclui-se que $k = k - 1 + 1 \in V$, o que contradiz o fato de $k \in W$. □

O fato que apresentaremos a seguir já era conhecido de Euclides, cerca de trezentos anos antes de Cristo, enunciado, porém sem demonstração, em *Os Elementos*.

Teorema 3.3.3. *Sejam dados números naturais n e m. Existem dois únicos números inteiros não negativos q e r, com $r < m$, tais que $n = mq + r$.*

Demonstração. **Existência** Se $n < m$, basta tomar $q = 0$ e $r = n$. Se $n = m$, basta tomar $q = 1$ e $r = 0$. Portanto, resta apenas provar a propriedade quando $n > m$.

A demonstração será por indução completa sobre n. Se $n = 1$, o resultado é válido, pelas considerações acima, pois $1 = n \leq m$.

Suponha agora que o resultado seja válido para todo i, com $1 \leq i \leq n$. Seja $m < n$, logo $1 \leq n + 1 - m \leq n$ e, portanto, pela hipótese de indução, existem q' e r, com $r < m$, tais que $n + 1 - m = q'm + r$; logo $n + 1 = (q' + 1)m + r$, e o resultado é válido para $n + 1$, tomando $q = q' + 1$.

Unicidade Se $n = m$, só há um jeito de escrever n da forma $mq + r$, com $r < m$, que é: $n = m \cdot 1 + 0$. Se $n < m$, também só há um jeito de escrever n nessa forma: $n = 0q + n$. O resultado é portanto verdadeiro quando $n = 1$, já que, neste caso, $1 = n \leq m$.

A prova será também por indução completa sobre n. Vimos acima que a unicidade está garantida quando $n = 1$. Suponha o resultado válido para todos os números naturais menores ou iguais a n.

Suponha agora que $n + 1 = qm + r = q'm + r'$, com $r, r' < m$. Podemos supor que $n + 1 > m$, já que o resultado está garantido quando $n + 1 \leq m$.

Subtraindo na igualdade acima m, obtemos que

$$n + 1 - m = (q - 1)m + r = (q' - 1)m + r',$$

e, pela hipótese de indução, temos que $q - 1 = q' - 1$ e $r = r'$, daí seguindo a unicidade da escrita de $n + 1$.

Pelo Teorema da Indução Completa, o resultado fica estabelecido para todo número natural n. □

O resultado a seguir é a base sobre a qual se apoiam os sistemas de numeração.

Teorema 3.3.4. *Seja dado um número natural $b > 1$. Todo número natural a se escreve de modo único na forma*

$$a = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n,$$

onde n é um inteiro não negativo, todos os a_i satisfazem às desigualdades $0 \leq a_i < b$ e $a_n \neq 0$.

Demonstração. Note que $a = 1$ se escreve na forma acima, pois, para isto, basta tomar $n = 0$ e $a_0 = 1$.

Seja S o subconjunto dos naturais que não admitem uma representação como acima. Queremos mostrar que $S = \emptyset$.

Note que $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$, pois vimos acima que $1 \notin S$.

Suponha agora, por absurdo, que $S \neq \emptyset$, logo, S possui um menor elemento, que certamente é maior do que 1. Seja a' este menor elemento. Pelo algoritmo euclidiano da divisão, temos que $a' = bq + r$, onde $0 \leq r < b$. Mas, então $q < a'$ e, portanto, $q \notin S$. Logo, q se escreve na forma do teorema e, portanto, a' também, o que é uma contradição, provando assim que $S = \emptyset$.

Deixaremos a prova da unicidade da escrita como um desafio para você. □

Podemos agora generalizar o problema da moeda falsa que apresentamos na Seção 2.3.

Exemplo 3.4.1. Seja m o número total de moedas das quais sabe-se que uma é falsa, mais leve do que as demais. No Teorema acima, tomando $b = 2$, temos que todo número natural m se escreve como somas de potências de 2 (note que, neste caso, cada a_i é 0 ou 1), chamada de expansão binária. Isto é, existem números inteiros $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ tais que

$$m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}.$$

Vamos provar, usando Indução Completa sobre n_r, que bastam n_r pesagens para descobrir a moeda falsa.

Suponha $n_r = 1$, ou seja, temos, no máximo, três moedas. Pondo

uma moeda em cada prato da balança, descobre-se imediatamente a moeda falsa e, portanto, o resultado é trivialmente verificado. Suponha o resultado verdadeiro para todo $n' < n_r$.

Sejam agora $2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$ moedas, das quais uma é falsa. Separemos as moedas em 2 lotes com, respectivamente, 2^{n_r} e $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_{r-1}}$ moedas cada um. Começamos analisando o primeiro lote com 2^{n_r} moedas. Colocamos metade dessas moedas em cada prato da balança. Se a moeda falsa está neste lote, com o método discutido no Capítulo 2, aplicado às 2^{n_r-1} moedas que estão no prato mais leve, sabemos que podemos descobrir a moeda falsa com, no máximo, $n_r - 1$ pesagens, com a pesagem já efetuada, descobrimos a moeda com no máximo n_r pesagens. Se a moeda falsa não está nesse lote, descartamos o lote todo. Sobram, então, $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_{r-1}}$ moedas a serem analisadas. Pela hipótese de indução, bastam n_{r-1} pesagens para descobrir a moeda falsa, que, juntamente com a pesagem já realizada, perfazem um total de $n_{r-1} + 1$ pesagens, que certamente é menor do que ou igual a n_r.

A fórmula do binômio de Newton se generaliza para m parcelas, conforme veremos a seguir.

Teorema 3.3.5 (Fórmula de Leibniz)**.** *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ elementos de um conjunto A munido de uma adição e de uma multiplicação sujeitas às leis básicas da aritmética, e seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}.$$

Demonstração. A prova será por indução completa sobre m. Se

$m = 2$, esta é a fórmula do binômio de Newton.

Suponha a fórmula válida para todos os naturais menores do que ou iguais a m, e vamos mostrar que é também válida para $m+1$. Pela fórmula do binômio de Newton,

$$(a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1})^n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} (a_1 + \cdots + a_m)^i a_{m+1}^j.$$

A hipótese de indução nos fornece

$$(a_1 + \cdots + a_m)^i = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=i} \frac{i!}{i_1! i_2! \cdots i_m!}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m};$$

logo,

$$(a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1})^n =$$

$$\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=i} \frac{i!}{i_1! i_2! \cdots i_m!}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m} a_{m+1}^j =$$

$$\sum_{i+j=n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=i} \binom{n}{i} \frac{i!}{i_1! i_2! \cdots i_m!}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m} a_{m+1}^j =$$

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m+i_{m+1}=n} \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_m! i_{m+1}!}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m} a_{m+1}^{i_{m+1}},$$

pois

$$\binom{n}{i} \frac{i!}{i_1! i_2! \cdots i_m!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\ \frac{i!}{i_1! i_2! \cdots i_m!} = \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_m! i_{m+1}!},$$

onde pusemos $i_{m+1} = n - i = j$. □

Se você não entendeu a manipulação com os duplos somatórios,

acima, pergunte a alguém. Caso a dúvida persista, não faz mal, fica para uma próxima leitura.

A fórmula do teorema acima tem o nome de fórmula de Leibniz em homenagem ao matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), que compartilha com Newton o crédito pela invenção do Cálculo Diferencial.

Problemas

3.3.1 Um número natural $p > 1$ é primo quando os únicos divisores dele são 1 e o próprio p. Mostre que todo número natural $n \geq 2$ possui algum divisor primo.

3.3.2 Mostre que todo número natural $n \geq 2$ se decompõe como produto de números primos.

3.3.3 Usando a fórmula do binômio de Newton e Indução Completa, mostre que, para cada $r \in \mathbb{N}$, a soma

$$S_r(n) = \sum_{i=1}^{n} i^r$$

é um polinômio de grau $r+1$ em n com termo de maior grau igual a $\frac{1}{r+1}n^{r+1}$.

3.3.4 Para $n, m \in \mathbb{N}$, demonstre a igualdade:

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!} = m^n.$$

3.3.5 Seja (u_n) a sequência de Fibonacci. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, mostre que:

(a) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$;

(b) $u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$;

(c) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$;

(d) $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$.

3.4 O Princípio das Gavetas

Em 1834, o destacado matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), criador do conceito moderno de função, enunciou o seguinte princípio, apelidado de *Princípio da Casa de Pombos*:

Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se $m > n$, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo.

Isto parece realmente óbvio, pois tem todo o respaldo da nossa experiência do dia a dia. Tente então provar esta afirmação.

Conseguiu? Parabéns. Se não conseguiu, mãos à obra!

Este princípio também leva o nome de Princípio das Gavetas, pois pode ser reenunciado, de modo equivalente, como segue:

Teorema 3.4.1 (Princípio de Dirichlet)**.** *Queremos guardar m obje-*

tos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.

Demonstração. Vamos provar este resultado por Indução Matemática sobre o número n de gavetas.

Para $n = 1$, o resultado é óbvio pois, se temos mais de um objeto e uma só gaveta, teremos que acomodar nesta gaveta mais de um objeto.

Suponha então o resultado válido para um certo número n de gavetas e consideremos a situação de termos $n+1$ gavetas e $m > n+1$ objetos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso, para aplicar a Indução Matemática e concluir que vale para todo número natural n.

Depois de acomodar todos os objetos nas $n + 1$ gavetas, escolha uma gaveta ao acaso. Se nesta gaveta há mais de um objeto, a nossa asserção está provada. Se nesta gaveta não há nenhum objeto, nas n gavetas restantes estão acomodados $m > n + 1 > n$ objetos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. Se na gaveta escolhida há um objeto, logo, nas n gavetas restantes, estão distribuídos $m - 1 > n$ objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. □

Este simples princípio tem inúmeras aplicações, matemáticas ou não, algumas das quais veremos a seguir.

Exemplo 3.4.1. Na região metropolitana de São Paulo, existem pelo

menos duas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo, o mesmo ocorrendo com, pelo menos, dois homens.

De fato, uma estimativa por cima nos diz que uma pessoa pode ter, no máximo, 7.10^6 fios de cabelo. Na região metropolitana de São Paulo, existem mais de 10.10^6 mulheres e mais de 9.10^6 homens (fonte: PNAD 2004). O Princípio das Gavetas agora permite concluir o desejado.

Exemplo 3.4.2. Existem n pessoas em uma festa. Algumas se conhecem, outras não. Mostre que na festa existem duas pessoas que têm mesmo número de conhecidos, supondo que a relação de *conhecido* é simétrica: se x é conhecido de y, então y é conhecido de x; e não reflexiva: ninguém é conhecido de si mesmo (será essa relação transitiva?).

De fato, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 0 a $n-1$ (uma pessoa não é conhecida de si mesma!), as duas situações não podendo ocorrer ao mesmo tempo, pois, se uma pessoa conhece todo mundo, pela simetria, não pode haver uma pessoa que não conheça ninguém. Portanto, ao associarmos os n indivíduos às $n-1$ possibilidades de número de conhecidos, pelo princípio de Dirichlet, duas pessoas deverão ter o mesmo número de conhecidos.

Vejamos agora algumas aplicações mais "sérias".

Exemplo 3.4.3. Dentre cinco pontos escolhidos no interior de um triângulo equilátero de lado 1 cm, existem dois pontos que distam entre si menos do que $0,5$ cm.

De fato, divida o triângulo em quatro triângulos menores,

conectando os pontos médios dos lados do triângulo original. A distância entre dois pontos que estão em um dos triângulos pequenos e no interior do triângulo maior é menor do que o seu lado que mede $0,5$ cm. Ao escolhermos cinco pontos no interior do triângulo dado, pelo Princípio das Gavetas, dois dos pontos pertencerão a um dos triângulos pequenos, o que prova a nossa afirmação.

Exemplo 3.4.4. Se cada ponto do plano é pintado de vermelho ou de azul, então algum retângulo no plano tem seus vértices de uma mesma cor.

Trace três retas horizontais. Acharemos um retângulo com vértices sobre duas destas retas. Os outros lados são verticais. Uma reta vertical, ao cortar as três paralelas, tem três candidatos a vértice do retângulo procurado.

Três pontos podem ser coloridos com 2 cores de 8 modos distintos. Portanto, se você escolher 9 retas verticais, pelo Princípio das Gavetas, duas dessas retas vão encontrar cada uma das três retas horizontais em um par de pontos de mesma cor. Agora, dos três pares de pontos, certamente dois terão a mesma cor, o que fornece os vértices do retângulo.

Exemplo 3.4.5. Existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 2 007.

Existem 2 007 possíveis restos pela divisão por 2 007. Considere a sequência das potências de 3:

$$1, 3, 3^2, \dots, 3^{2\,007}.$$

Esta sequência é composta de 2 008 números. Portanto, pelo Princípio das Gavetas, dois desses, digamos 3^n e 3^m, com $n > m$, têm mesmo resto quando divididos por 2 007. Logo, a sua diferença $3^n - 3^m$ é divisível por 2 007 (você saberia justificar isso?).

Exemplo 3.4.6. Existe uma potência de 3 que termina em 001.

Argumentando como no exemplo anterior, conclui-se que existem m e n com $n > m$ tais que 3^n e 3^m têm mesmo resto quando divididos por 1 000. Logo, $3^n - 3^m = 3^m(3^{n-m} - 1)$ é divisível por 1 000. Como 1 000 e 3^m não têm fatores comuns, 1 000 deve dividir o segundo fator $3^{n-m} - 1$. Isto significa que 3^{n-m} termina em 001.

Exemplo 3.4.7. Suponha que $n + 1$ inteiros são tomados ao acaso dentre os inteiros $1, 2, \dots, 2n$. Pelo menos um desses inteiros é múltiplo de um outro.

De fato, sejam $a_1, \dots, a_{n+1}$ os inteiros escolhidos. Note que cada número a_i pode ser escrito como $2^{n_i} b_i$, onde b_i é um número ímpar. Como no intervalo $1, \dots, 2n$ existem n números ímpares, e os $n + 1$ números b_i necessariamente se encontram neste intervalo, pelo princípio de Dirichlet, devemos ter $b_r = b_s$ para algum par de inteiros r e s variando no conjunto $\{1, \dots, n + 1\}$, com $n_r > n_s$. É claro que $a_r = 2^{n_r} b_r$ é um múltiplo de $a_s = 2^{n_s} b_r$.

Alguns dos exemplos acima foram tomados emprestados de

$www.cut - the - knot.org/do_you_know/pigeon.shtml$,

onde você poderá encontrar muitos outros.

Problemas

3.4.1 Pode-se afirmar, com toda certeza, que em São Paulo existem um homem e uma mulher com a mesma quantidade de fios de cabelo?

3.4.2 Mostre que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível pelo ano em que você nasceu.

3.4.3 Dados quaisquer seis inteiros de 1 a 10, mostre que dois deles possuem soma ímpar.

3.5 Desigualdades

Nesta seção, estabeleceremos algumas desigualdades importantes que têm inúmeras aplicações em vários contextos.

Teorema 3.5.1 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Se c é um número real tal que $c > -1$ e $c \neq 0$, então para todo número natural $n \geq 2$ vale a desigualdade:*

$$(1+c)^n > 1 + nc.$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a desigualdade acima; vamos prová-la por indução sobre n. É claro que $P(2)$ é verdadeira, pois

$$(1+c)^2 = 1 + 2c + c^2 > 1 + 2c.$$

Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \geq 2$. Multiplicando ambos

os lados da desigualdade acima por $1+c$ (que é >0), obtemos

$$(1+c)^{n+1} > (1+n\cdot c)(1+c) = 1+(n+1)c+nc^2 > 1+(n+1)c,$$

donde concluímos que $P(n+1)$ é verdadeira.

Por Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. □

Médias são objetos matemáticos que têm muitas aplicações na vida real. Há várias médias; definiremos aqui três delas, que relacionaremos entre si.

Dados números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, os números

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \qquad \text{e}$$

$$H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}},$$

são chamados, respectivamente, de *Média Aritmética*, *Média Geométrica* e *Média Harmônica* dos números dados.

Existe uma relação entre essas três médias dada por

$$H_n \le G_n \le A_n, \tag{3.1}$$

cuja demonstração pode ser feita por indução, mas que não é trivial se tentarmos fazê-la diretamente.

No caso em que $n=2$, a propriedade (3.1) é fácil de provar. É o

que faremos a seguir.

Note que

$$0 \leq \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1 a_2}{2},$$

o que implica

$$a_1 a_2 \leq \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1 a_2}{2} = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)^2, \tag{3.2}$$

seguindo daí que

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Na desigualdade acima, valerá a igualdade se, e somente se,

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1 a_2}{2},$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1 a_2}{2} = 0,$$

o que equivale a ter $a_1 = a_2$.

Por outro lado, de (3.2) segue facilmente que

$$4a_1^2 a_2^2 \leq (a_1 + a_2)^2 a_1 a_2;$$

logo,

$$2a_1 a_2 \leq (a_1 + a_2)\sqrt{a_1 a_2}$$

e, portanto,

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leq \sqrt{a_1 a_2}.$$

Não é difícil verificar (faça-o) que, também neste caso, vale a igualdade na desigualdade acima se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Os dois próximos exemplos nos darão aplicações geométricas da desigualdade entre Média Geométrica e Média Aritmética.

Exemplo 3.5.1. De todos os retângulos de perímetro p dado, o quadrado é o que tem maior área.

De fato, suponha que os lados do retângulo tenham medidas a e b. Pela desigualdade $G_2 \leq A_2$, segue que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{p}{4}.$$

Daí, segue que a área do retângulo de perímetro p dado é limitada superiormente pela constante $p^2/16$. Segundo o que provamos acima, a igualdade e, portanto, o máximo, ocorre só quando $a = b$, ou seja, só quando o retângulo é um quadrado.

Você saberia dizer se, nessa situação, existe um retângulo de área mínima?

Exemplo 3.5.2. De todos os retângulos de área dada A, o de menor perímetro é o quadrado.

Suponha que os lados do retângulo tenham medidas a e b. Nova-

mente, pela desigualdade $G_2 \leq A_2$, segue que

$$\sqrt{A} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{p}{4}.$$

Daí, segue que o perímetro mínimo de todos os retângulos de área dada A ocorre quando $a = b$, ou seja, quando o retângulo é um quadrado. Será que existe um retângulo de perímetro máximo?

A prova da desigualdade (3.1) será enormemente facilitada com a demonstração do seguinte resultado intermediário.

Teorema 3.5.2. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos dados, tais que $a_1 \cdots a_n = 1$, então $a_1 + \cdots + a_n \geq n$, valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = \cdots = a_n = 1$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é trivialmente verificado.

Suponha o resultado válido para algum n, e sejam $a_1, \ldots, a_{n+1}$ números reais positivos tais que $a_1 \cdots a_n a_{n+1} = 1$. Dois casos podem se apresentar.

1º Caso: Todos os números são iguais, ou seja,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}.$$

Neste caso, eles têm que ser iguais a 1. Portanto,

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} = n + 1,$$

e o resultado, neste caso, vale para $n + 1$.

2º Caso: Nem todos os números são iguais. Neste caso, certamente um dos números é maior do que 1 e um outro é menor do que 1 (justifique). Podemos então supor que $a_1 < 1$ e $a_{n+1} > 1$. Denotando $a_1 \cdot a_{n+1}$ por b_1, temos que $b_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Logo, pela hipótese de indução, segue que $b_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$, logo,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n+1} = b_1+a_2+\cdots+a_n+a_1-b_1+a_{n+1} \geq n+a_1-b_1+a_{n+1}. \tag{3.3}$$

Mas,

$$a_1 - b_1 + a_{n+1} = a_1 - a_1 a_{n+1} + a_{n+1} = 1 - (1-a_1)(1-a_{n+1}) > 1, \tag{3.4}$$

já que $a_1 < 1$ e $a_{n+1} > 1$. Juntando (3.3) e (3.4), obtemos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} > n + 1,$$

como queríamos provar. □

Corolário 1. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos, então,*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração. É claro que $\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{a_n}{a_1} = 1$; logo, pelo teorema anterior, segue a desigualdade desejada. A igualdade vale se, e somente se,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1} = 1,$$

o que equivale a dizer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Exemplo 3.5.3. Para todo x real, vale a desigualdade:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$$

De fato, temos que

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Visto que o produto das duas últimas parcelas é 1, a desigualdade segue do teorema anterior.

Exemplo 3.5.4. Seja $a > 1$ um número real. Temos que

$$\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2.$$

Esta desigualdade também segue do teorema anterior, tendo em vista que $\log_{10} a \cdot \log_a 10 = 1$.

Teorema 3.5.3. *Temos que $G_n \leq A_n$, valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*

Demonstração. Ponhamos $g = G_n$. Logo, da igualdade

$$g = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

segue que

$$1 = \sqrt[n]{\frac{a_1}{g} \cdots \frac{a_n}{g}},$$

isto é,

$$\frac{a_1}{g} \cdots \frac{a_n}{g} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.5.2, temos que

$$\frac{a_1}{g} + \cdots + \frac{a_n}{g} \geq n,$$

o que nos dá a desigualdade requerida. A igualdade vale se, e somente se, $a_1/g = a_2/g = \cdots = a_n/g$, o que ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Exemplo 3.5.5. Para $n \geq 2$, vale a desigualdade:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

De fato, pelo Teorema 3.5.2, temos que

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} < \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

O resultado segue elevando à potência n ambos os lados da desigualdade acima.

Teorema 3.5.4. *Temos que $H_n \leq G_n$, valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.3, temos que

$$\frac{1}{G_n} = \sqrt[n]{a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}} \leq \frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} = \frac{1}{H_n},$$

provando assim a desigualdade. A igualdade vale se, e somente se, $a_1^{-1} = a_2^{-1} = \cdots = a_n^{-1}$, o que equivale ao fato de que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

O método da prova da desigualdade (3.1) que utilizamos aqui, bem como alguns dos exemplos, foram tomados emprestado do livrinho *Desigualdades*, de autoria de P. P. Korovkin, Editorial MIR – Moscou, 1976.

Problemas

3.5.1 Se x é um número real positivo, mostre que:

$$x^n + x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1.$$

3.5.2 Prove que, para todo x real, vale a desigualdade

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

3.5.3 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a+b>0$ e $a \neq b$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$,

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n.$$

3.5.4 Prove que se $a_1, \ldots, a_n$ e p são números reais positivos, então

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \sqrt[p]{\frac{a_1^p + \cdots + a_n^p}{n}},$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = \cdots = a_n$.

3.5.5 Prove, para $c \geq 0$, a seguinte generalização da desigualdade de

Bernouilli
$$(1+c)^n \geq 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2.$$

3.5.6 Defina a sequência $(x_n), n \in \mathbb{N}$, pela regra $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

(a) Mostre que, para todo $n \geq 2$, tem-se que $x_n > 0$.

(b) Mostre que, para todo $n \geq 2$, tem-se que
$$n = (1+x_n)^n \geq \frac{n(n-1)x_n^2}{2}.$$

(c) Conclua que
$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

(d) Você saberia dizer para quanto tende $\sqrt[n]{n}$ quando n cresce indefinidamente?

Sugestão: para (b): use o Problema 3.5.5.

Respostas

Capítulo 1

1.3.1 (a) $n(n+1)$

1.3.1 (b) $\dfrac{n(3n+1)}{2}$

1.3.2 (a) $2^{n+1}-2$

1.3.2 (b) $1-\dfrac{1}{2^n}$. A soma tende para 1 quando n cresce indefinidamente.

1.3.3) A vitória régia ocupará toda a superfície do tanque no penúltimo dia; ou seja, no décimo nono dia.

1.3.4) O boato leva 80 minutos para tomar conta de toda a cidade.

1.3.5 (c) $a_n = 2^n - 1$ e $S_n = 2^{n+1} - (n+2)$

Capítulo 2

2.4.1) $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$

2.5.4) $a_n = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})^n - 3(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n}{4}$

Capítulo 3

3.1.1 (a) $\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{12}$

3.1.1 (b) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3.1.1 (c) $\dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

3.1.1 (d) $\dfrac{n(n+1)}{24}(n^2+5n+2)$

3.1.1 (e) $\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

3.1.1 (f) $n(2n^3-n+2)$

3.1.2 (a)

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 1 - 10\ \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \right.$$

$$\left. 10\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\ \frac{n(n+1)}{2} - n\right].$$

3.4.1) Não.

3.5.6 (d) $\sqrt[n]{n}$ tende a 1 quando n cresce indefinidamente.